



TITLE:

Privalov空間の準同型 (コロフキン型近似定理)

AUTHOR(S):

真次, 康夫; 植木, 誠一郎

CITATION:

真次, 康夫 ...[et al]. Privalov空間の準同型 (コロフキン型近似定理). 数理解析研究所講究録 2002, 1243: 30-44

ISSUE DATE:

2002-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41657>

RIGHT:

Privalov 空間の準同型

信州大学理学部 真次 康夫 (Yasuo Matsugu)

植木誠一郎 (Sei-ichiro Ueki)

Faculty of Science, Shinshu University

1 Introduction

$B \equiv B_n$ を \mathbb{C}^n の単位球, $S \equiv \partial B$ を単位球面とする. ν, σ はそれぞれ \mathbb{C}^n 上の Lebesgue 測度, S 上の Euclid 測度であり, $\nu(B) = 1, \sigma(S) = 1$ となるように正規化したものを表す. $\alpha \in (-1, \infty)$ に対し, $c_\alpha = \Gamma(n + \alpha + 1) / \{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)\}$, $d\nu_\alpha(z) = c_\alpha(1 - |z|^2)^\alpha \nu(z)$ ($z \in B$) と置く. ここで, Γ はガンマ関数である. この時, ν_α は B 上の正值 Borel 測度であり, $\nu_\alpha(B) = 1$ である. $H(B)$ は B 上の正則関数の全体を表す.

$p \in (1, \infty)$ に対し, B 上の Privalov 空間 $N^p(B)$ を次のように定義する:

$$N^p(B) = \left\{ f \in H(B) : \sup_{0 < r < 1} \int_S \{\log(1 + |f_r|)\}^p d\sigma < \infty \right\}.$$

但し, $f_r(\zeta) = f(r\zeta)$ ($0 < r < 1, \zeta \in S$) である. B 上の Nevanlinna 空間 $N(B)$, Smirnov 族 $N^*(B)$ を次のように定義する:

$$N(B) = \left\{ f \in H(B) : \sup_{0 < r < 1} \int_S \log(1 + |f_r|) d\sigma < \infty \right\}.$$

$f \in N(B)$ に対し, S のほとんど全ての点 ζ で $f^*(\zeta) \equiv \lim_{r \uparrow 1} f_r(\zeta)$ が存在する.

$$N^*(B) = \left\{ f \in N(B) : \lim_{r \uparrow 1} \int_S \log(1 + |f_r|) d\sigma = \int_S \log(1 + |f^*|) d\sigma \right\}.$$

$p \in [1, \infty), \alpha \in (-1, \infty)$ に対し, B 上の荷重 Bergman-Privalov 空間 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ を次のように定義する:

$$(AN)^p(\nu_\alpha) = \left\{ f \in H(B) : \int_B \{\log(1 + |f|)\}^p d\nu_\alpha < \infty \right\}.$$

便宜上, $N^1(B) \equiv N^*(B)$, $(AN)^p(\nu_{-1}) \equiv N^p(B)$ ($1 \leq p < \infty$) と置く.

各 $p \in [1, \infty)$, $\alpha \in [-1, \infty)$ に対し, $(AN)^p(\nu_\alpha)$ 上の $\|\cdot\|_{p,\alpha}$, $d_{p,\alpha}(\cdot, \cdot)$ を次のように定義する:

$$\|f\|_{p,\alpha} = \begin{cases} \left[\int_S \{\log(1 + |f^*|)\}^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} & \text{if } \alpha = -1, \\ \left[\int_B \{\log(1 + |f|)\}^p d\nu_\alpha \right]^{\frac{1}{p}} & \text{if } -1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

$$d_{p,\alpha}(f, g) = \|f - g\|_{p,\alpha} \quad (f, g \in (AN)^p(\nu_\alpha)).$$

この時, $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ は次の 5 つの条件を満たす:

- (i) 各 $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$ に対して, $0 \leq \|f\|_{p,\alpha} < \infty$.
- (ii) $\|f\|_{p,\alpha} = 0$ となるのは B 上で $f = 0$ の時に限る.
- (iii) $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\min\{1, |\lambda|\} \|f\|_{p,\alpha} \leq \|\lambda f\|_{p,\alpha} \leq \max\{1, |\lambda|\} \|f\|_{p,\alpha}$$

が成り立つ.

- (iv) $\|f + g\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha} + \|g\|_{p,\alpha} \quad (f, g \in (AN)^p(\nu_\alpha)).$
- (v) $\|f \cdot g\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha} + \|g\|_{p,\alpha} \quad (f, g \in (AN)^p(\nu_\alpha)).$

$\|\cdot\|_{p,\alpha}$ のこの性質により $(AN)^p(\nu_\alpha)$ ($1 \leq p < \infty$, $-1 \leq \alpha < \infty$) は加法, 乗法に関して閉じており, 従って algebra をなす. また, $d_{p,\alpha}$ は $(AN)^p(\nu_\alpha)$ 上の平行移動に関して不変な距離になる. この距離に関して $(AN)^p(\nu_\alpha)$ は完備であり, その加法, 乗法, スカラー乗法は何れも連続である. 従って $((AN)^p(\nu_\alpha), d_{p,\alpha})$ は F -algebra をなす. さらに, $(AN)^p(\nu_\alpha)$ における収束は B 上の広義一様収束を導く.

Privalov 空間 $N^p(B_1)$ は I. I. Privalov [8] の中で最初に考察された関数空間であり, その性質については M. Stoll [13], A. V. Subbotin [15] 等で論じられている. また, 1 次元の場合の Bergman-Privalov 空間 $(AN)^1(\nu)$ は M. Stoll [13] の中で最初に導入され論じられたものである.

2 Notations and Preliminaries

B から B の上への両正則写像の全体を $Aut(B)$ で表す. 各 $a \in B$ に対し, a によって生成される線型部分空間を $[a]$ で表す. P_a を \mathbb{C}^n から $[a]$ の上への直交射影とする. $a = 0$ の時, $P_0 = 0$ であり, $a \neq 0$ の時,

$$P_a(z) = \frac{\langle z, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \quad (z \in \mathbb{C}^n)$$

と表現される. さらに写像 φ_a を次のように定義する:

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a(z) - \sqrt{1 - |a|^2}(z - P_a(z))}{1 - \langle z, a \rangle} \quad (z \in B).$$

この時, φ_a について次のことが成立する ([10]Theorem 2.2.2, Theorem 2.2.6):

Lemma 1. 各 $a \in B$ に対し,

- (i) $\varphi_a(0) = a, \varphi_a(a) = 0.$
- (ii) $1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \langle z, a \rangle|^2} \quad (z \in B).$
- (iii) $\varphi_a \in \text{Aut}(B)$, かつ $\varphi_a^{-1} = \varphi_a.$
- (iv) $(J_{\mathbf{R}}\varphi_a)(z) = \left(\frac{1 - |a|^2}{|1 - \langle z, a \rangle|^2} \right)^{n+1} \quad (z \in B).$

但し, $(J_{\mathbf{R}}\varphi_a)(z)$ は z における φ_a の実ヤコビアンである.

φ を B から B への単葉な正則写像とする. $z \in B$ に対し, $\Omega_\varphi(z)$ を次のように定義する:

$$\Omega_\varphi(z) = \frac{\|\varphi'(z)\|^2}{|J_\varphi(z)|^2}.$$

但し, $\varphi'(z)$ は z における φ の微分であり, $\|\varphi'(z)\|$ は $\varphi'(z)$ の作用素ノルムである. また, $J_\varphi(z)$ は z における φ の複素ヤコビアンである. 次は容易に示される:

Lemma 2. φ は B から B への単葉な正則写像で, $\sup_{w \in \varphi(B)} \|(\varphi^{-1})'(w)\| < \infty$ を満たすものと仮定する. この時,

$$\sup_{z \in B} \Omega_\varphi(z) < \infty$$

が成り立つ.

ψ を $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{t} = \infty$ を満たす \mathbb{R} 上の 2 回微分可能非負非減少な凸関数とする. このような関数 ψ に対し, Hardy-Orlicz 空間 $H_\psi(B)$, 荷重 Bergman-Orlicz 空間 $A_\psi(\nu_\alpha)$ を次のように定義する:

$$H_\psi(B) = \left\{ f \in H(B) : \sup_{0 < r < 1} \int_S \psi(\log |f_r|) d\sigma < \infty \right\},$$

$$A_\psi(\nu_\alpha) = \left\{ f \in H(B) : \int_B \psi(\log |f|) d\nu_\alpha < \infty \right\}.$$

$\psi(t) = \{\log(1 + e^t)\}^p$ ($1 < p < \infty$) の時, $H_\psi(B)$ は $N^p(B)$ であり, $A_\psi(\nu_\alpha)$ は $(AN)^p(\nu_\alpha)$ である. これらの $H_\psi(B)$, $A_\psi(\nu_\alpha)$ は次のように特徴づけられる:

Lemma 3 (C. Ouyang-J. Riihenta [7]). $f \in H(B) \setminus \{0\}$ に対し, 次は $f \in H_\psi(B)$ である為の必要十分条件である:

$$\int_B \psi''(\log |f(z)|) \frac{|(\nabla f)(z)|^2}{|f(z)|^2} (1 - |z|^2) d\nu(z) < \infty.$$

但し, $|(\nabla f)(z)|^2 = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \right|^2$ である.

Lemma 4 ([4]). $-1 < \alpha < \infty$ とする. $f \in H(B) \setminus \{0\}$ に対し, 次は $f \in A_\psi(\nu_\alpha)$ である為の必要十分条件である:

$$\int_B \psi''(\log |f(z)|) \frac{|(\mathcal{R}f)(z)|^2}{|z|^2 |f(z)|^2} (1 - |z|^2)^2 d\nu_\alpha(z) < \infty.$$

但し, $(\mathcal{R}f)(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z)$ である.

特に $(AN)^p(\nu_\alpha)$ ($-1 < \alpha < \infty, 1 \leq p < \infty$) については次のことが成り立つ:

Lemma 5 ([5]). $-1 < \alpha < \infty, 1 \leq p < \infty$ とする. $f \in H(B) \setminus \{0\}$ に対し, 次は $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$ である為の必要十分条件である:

$$\int_B \tilde{\Delta}(\{\log(1 + |f|)\}^p) d\nu_\alpha < \infty.$$

但し, $\tilde{\Delta}$ は B 上の Bergman 計量に関する Laplacian である.

Lemma 6 ([10] Theorem 6.6.5). T を B 上の有界正則関数の全体 $H^\infty(B)$ から $H(B)$ への乗法的線型写像とする. T は $T(A(B)) \supsetneq \mathbb{C}$ を満たすものとする. ここで, $A(B) = C(\overline{B}) \cap H(B)$ は超球環である. この時, B から B への正則写像 φ が存在し, T は次の形で与えられる:

$$T(f) = f \circ \varphi \quad (f \in H^\infty(B)).$$

次は Lemma 1 等を用いて簡単な計算により示される:

Lemma 7. $1 \leq p \leq q < \infty, -1 \leq \alpha < \infty$ とする. $\varphi \in \text{Aut}(B)$ に対して, φ による合成作用素 $C_\varphi : (AN)^q(\nu_\alpha) \rightarrow (AN)^p(\nu_\alpha)$ は有界である.

Lemma 8 ([14] Theorem 6.5). $f \in N(B)$ に対し, S 上の正值 Borel 測度 μ が存在し, 次が成立する:

$$(i) \quad \log(1 + |f(z)|) \leq P[\mu](z) \quad (z \in B).$$

但し, $P[\mu]$ は μ の Poisson 積分である:

$$P[\mu](z) = \int_S P(z, \zeta) d\mu(\zeta), \quad P(z, \zeta) = \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \langle z, \zeta \rangle|^{2n}}.$$

$$(ii) \quad \|\mu\| = \sup_{0 < r < 1} \int_S \log(1 + |f_r|) d\sigma.$$

特に $f \in N^*(B)$ の場合は, $\|\mu\| = \|f\|_{N^*(B)}$ である.

3 Main Results

次の Theorem 1, Theorem 2, Corollary 1 は一変数の結果 [6, 9, 16] の多変数版である:

Theorem 1. $1 \leq p < \infty$, $-1 \leq \alpha < \infty$ とする. γ を $(AN)^p(\nu_\alpha)$ 上の連続な自明でない (すなわち $\gamma \not\equiv 0$) 乗法的線型汎関数とする. この時, B の点 w が存在して γ は

$$\gamma(f) = f(w) \quad (f \in (AN)^p(\nu_\alpha))$$

を満たす.

Proof. \mathbb{C}^n の座標関数を π_j ($1 \leq j \leq n$) とすると各 π_j は $(AN)^p(\nu_\alpha)$ に属する. この π_j に対して $w_j = \gamma(\pi_j)$ とし, $w = (w_1, \dots, w_n)$ と置くと w は \mathbb{C}^n の点である.

まず, 任意の多項式 f に対して,

$$\gamma(f) = f(w) \tag{1}$$

が成り立つことを証明する. f は \mathbb{C}^n における多項式であるから π_j を用いて

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha \pi_1^{\alpha_1} \cdot \pi_2^{\alpha_2} \cdots \pi_n^{\alpha_n}$$

と表される. 但し, $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \subset \mathbb{C}$ は有限個を除いて 0 である. γ は乗法的線型汎関数であるから,

$$\begin{aligned} \gamma(f) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha \gamma(\pi_1)^{\alpha_1} \cdot \gamma(\pi_2)^{\alpha_2} \cdots \gamma(\pi_n)^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha w_1^{\alpha_1} \cdot w_2^{\alpha_2} \cdots w_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha w^\alpha \\ &= f(w). \end{aligned}$$

ゆえに (1) が成り立つ.

次に $w \in B$ であることを証明する. 仮に $w \notin B$ とすると次の 3 条件を満たす \mathbb{C}^n における多項式 f が存在する:

- (i) $|f| < 1$ in $\overline{B} \setminus \{\zeta\}$.
- (ii) $f(\zeta) = 1$.
- (iii) $f(w) \geq 1$.

但し, $\zeta = \frac{1}{|w|}w \in S$ である. この f に対して, $f_j = f^j$ ($j \in \mathbb{N}$) と置くと各 f_j も多項式であり, B 上で

$$0 \leq \{\log(1 + |f_j|)\}^p \leq (\log 2)^p \quad (j \in \mathbb{N}),$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \{\log(1 + |f_j|)\}^p = 0$$

を満たす. 従って, Lebesgue 収束定理により

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_B \{\log(1 + |f_j|)\}^p d\nu_\alpha = 0$$

が成り立つ. ゆえに

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j\|_{p, \alpha} = 0$$

である. この時, γ の連続性により

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma(f_j) = 0 \quad (2)$$

が従う.

他方, 各 f_j は多項式であるから (1) が成立するので f_j の決め方より,

$$\gamma(f_j) = f_j(w) = \{f(w)\}^j \quad (j \in \mathbb{N}).$$

f の取り方より $f(w) \geq 1$ であるから,

$$\gamma(f_j) \geq 1 \quad (j \in \mathbb{N}) \quad (3)$$

となる. (2) と (3) は矛盾する. ゆえに $w \in B$ でなければならない.

最後に各 $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$ に対して,

$$\gamma(f) = f(w)$$

が成り立つことを証明する. \mathbb{C}^n における多項式全体は $(AN)^p(\nu_\alpha)$ において稠密であるから, 各 $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$ に対して, ある多項式列 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が存在して,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{p, \alpha} = 0 \quad (4)$$

を満たす. $(AN)^p(\nu_\alpha)$ における収束は B 上の広義一様収束を導くので (4) により $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ は B 上で広義一様収束である. 従って, B の各点で収束するので, 特に点 w において収束する. すなわち,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(w) = f(w) \quad (5)$$

が成り立つ. 各 f_j は多項式であるから (1) により

$$\gamma(f_j) = f_j(w) \quad (j \in \mathbb{N}) \quad (6)$$

が成り立つ. さらに γ の連続性と (4) により

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma(f_j) = \gamma(f) \quad (7)$$

が従う. (5)~(7) により

$$\gamma(f) = f(w)$$

が成り立つ. □

Theorem 2. $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $-1 \leq \alpha < \infty$ とする. Γ を $(AN)^q(\nu_\alpha)$ から $(AN)^p(\nu_\alpha)$ への連続な環準同型とし, $\Gamma((AN)^q(\nu_\alpha)) \supsetneq \mathbb{C}$ を満たすものとする. この時, B から B への正則写像 φ が存在し, Γ は次の形で与えられる:

$$\Gamma(f) = f \circ \varphi \quad (f \in (AN)^q(\nu_\alpha)).$$

Proof. $H^\infty(B) \subset (AN)^q(\nu_\alpha)$ であるから $\tilde{\Gamma}$ を Γ の $H^\infty(B)$ への制限写像とすると, $\tilde{\Gamma}$ は $H^\infty(B)$ から $H(B)$ への環準同型写像になる. $\tilde{\Gamma}$ は $\tilde{\Gamma}(A(B)) \supsetneq \mathbb{C}$ を満たすことを示す. 仮に $\tilde{\Gamma}(A(B)) = \mathbb{C}$ と仮定すると, $\Gamma((AN)^q(\nu_\alpha)) \supsetneq \mathbb{C}$ によりある $f \in (AN)^q(\nu_\alpha)$ が存在して, $\Gamma(f)$ は非定数である. $A(B)$ は $(AN)^q(\nu_\alpha)$ において稠密であるから, この f に対して $A(B)$ に属する関数列 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が存在して,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{q, \alpha} = 0 \quad (1)$$

が成り立つ. 今, $\tilde{\Gamma}(A(B)) = \mathbb{C}$ であるから, 各 $j \in \mathbb{N}$ に対して $\tilde{\Gamma}(f_j)$ は定数関数であり, 従って, ある複素数 c_j が存在して,

$$\Gamma(f_j) = \tilde{\Gamma}(f_j) \equiv c_j \quad (2)$$

を満たす. Γ の連続性と (1) により

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\Gamma(f_j) - \Gamma(f)\|_{p, \alpha} = 0$$

であるから、(2) と合わせると、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|c_j - \Gamma(f)\|_{p, \alpha} = 0$$

が成り立つ. $(AN)^p(\nu_\alpha)$ における収束は B 上の広義一様収束を導くから、 $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j = \Gamma(f)$ は B 上で広義一様収束し、従って B の各点で収束する. ゆえに各 $w \in B$ に対して $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j = \Gamma(f)(w)$ であり、特に $w = 0$ として $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j = \Gamma(f)(0)$ であるから

$$\Gamma(f)(w) = \lim_{j \rightarrow \infty} c_j = \Gamma(f)(0).$$

すなわち、 $\Gamma(f)$ は定数関数である. このことは f の取り方に反する. よって $\tilde{\Gamma}(A(B)) \not\subseteq \mathbb{C}$ が成立する. $\tilde{\Gamma}$ は $H^\infty(B)$ から $H(B)$ への環準同型写像であり、 $\tilde{\Gamma}(A(B)) \not\subseteq \mathbb{C}$ を満たすので、Lemma 6 により、 B から B への正則写像 φ が存在して、

$$\tilde{\Gamma}(f) = f \circ \varphi \quad (f \in H^\infty(B))$$

が成立する. $\tilde{\Gamma}$ は Γ の $H^\infty(B)$ への制限写像であったから、各 $f \in H^\infty(B)$ に対して、

$$\Gamma(f) = f \circ \varphi \tag{3}$$

である.

最後に各 $f \in (AN)^q(\nu_\alpha)$ に対して、

$$\Gamma(f) = f \circ \varphi$$

が成り立つことを証明する. $H^\infty(B)$ は $(AN)^q(\nu_\alpha)$ において稠密であるから、各 $f \in (AN)^q(\nu_\alpha)$ に対して $H^\infty(B)$ に属する関数列 $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が存在し、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{q, \alpha} = 0 \tag{4}$$

を満たす. 従って、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f \tag{5}$$

は B 上の各点収束である. また、 Γ の連続性と (4) により

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Gamma(f_j) = \Gamma(f) \tag{6}$$

は B 上の各点収束であることがわかる. さらに各 $j \in \mathbb{N}$ に対して、 $f_j \in H^\infty(B)$ であるから (3) により

$$\Gamma(f_j) = f_j \circ \varphi \quad (j \in \mathbb{N}) \tag{7}$$

が成り立つ. (5)~(7) により B 上の各点 z で,

$$\begin{aligned}\Gamma(f)(z) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \Gamma(f_j)(z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (f_j \circ \varphi)(z) \\ &= (f \circ \varphi)(z).\end{aligned}$$

□

Corollary 1. $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $-1 \leq \alpha < \infty$ とする. Γ を $(AN)^q(\nu_\alpha)$ から $(AN)^p(\nu_\alpha)$ の上への連続な同型写像とすると, 次が成立する:

(i) $\varphi \in \text{Aut}(B)$ が存在し, Γ は

$$\Gamma(f) = f \circ \varphi \quad (f \in (AN)^q(\nu_\alpha))$$

を満たす.

(ii) $p = q$.

Proof. (i) は Theorem 2 から従う. (ii) を示す為にまず, $p < q$ とする. W. Rudin [10], p.140, Theorem 7.3.8 及び, J. H. Shapiro [12], p.246, Corollary 2.5 により $f \in (AN)^p(\nu_\alpha) \setminus (AN)^q(\nu_\alpha)$ である関数 f が存在する. $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$, $\Gamma^{-1}(f) \in (AN)^q(\nu_\alpha)$ であり,

$$f = \Gamma(\Gamma^{-1}(f)) = \Gamma^{-1}(f) \circ \varphi$$

となる. $\varphi \in \text{Aut}(B)$ であるから, Lemma 7 により $f \in (AN)^q(\nu_\alpha)$ である. これは $f \notin (AN)^q(\nu_\alpha)$ に反する. ゆえに $p \geq q$ でなければならない. 今の議論と同様にして $p \leq q$ が示される. 従って, $p = q$ であることがわかる. □

次の Theorem 3 で仮定する φ の条件は Cowen-MacCluer[2] Theorem 3.41 で取り上げられている:

Theorem 3. $1 \leq p < \infty$, $-1 \leq \alpha < \infty$ とする. φ は B から B への単葉な正則写像であり, $\sup_{z \in B} \Omega_\varphi(z) < \infty$ を満たすものとする. この時, $C_\varphi : (AN)^p(\nu_\alpha) \longrightarrow (AN)^p(\nu_\alpha)$ は有界である.

Proof. 先ず, $\alpha = -1$, $0 \in \varphi(B)$ の場合を考える. $a = \varphi^{-1}(0)$, $\psi = \varphi \circ \varphi_a$ と置く. この時, ψ は B から B への単葉な正則写像で $\psi(0) = 0$ である. Schwarz の補題により

$$|\psi(z)| \leq |z| \quad (z \in B) \quad (1)$$

が成り立つ。また,

$$\sup_{z \in B} \Omega_\psi(z) \leq \sup_{z \in B} \Omega_\varphi(z) \cdot \sup_{z \in B} \Omega_{\varphi_a}(z)$$

であり, 仮定より

$$\sup_{z \in B} \Omega_\varphi(z) < \infty,$$

Lemma 2 より

$$\sup_{z \in B} \Omega_{\varphi_a}(z) < \infty$$

であるから

$$K \equiv \sup_{z \in B} \Omega_\psi(z) < \infty \quad (2)$$

となる.

各 $f \in N^p(B) \setminus \{0\}$ に対し, $f \circ \psi \in H(B) \setminus \{0\}$ であり,

$$|\nabla(f \circ \psi)(z)|^2 \leq n|(\nabla f) \circ \psi(z)|^2 \|\psi'(z)\|^2 \quad (z \in B) \quad (3)$$

が成り立つ. (1), (2), (3) により

$$\begin{aligned} & \int_B \chi''(\log |(f \circ \psi)(z)|) \frac{|\nabla(f \circ \psi)(z)|^2}{|(f \circ \psi)(z)|^2} (1 - |z|^2) d\nu(z) \\ & \leq \int_B \chi''(\log |f(\psi(z))|) \frac{n|(\nabla f)(\psi(z))|^2 \|\psi'(z)\|^2}{|f(\psi(z))|^2} (1 - |\psi(z)|^2) d\nu(z) \\ & = n \int_B \chi''(\log |f(\psi(z))|) \frac{|(\nabla f)(\psi(z))|^2}{|f(\psi(z))|^2} (1 - |\psi(z)|^2) \Omega_\psi(z) |J_\psi(z)|^2 d\nu(z) \\ & \leq nK \int_B \chi''(\log |f(\psi(z))|) \frac{|(\nabla f)(\psi(z))|^2}{|f(\psi(z))|^2} (1 - |\psi(z)|^2) |J_\psi(z)|^2 d\nu(z) \\ & \leq nK \int_B \chi''(\log |f(w)|) \frac{|(\nabla f)(w)|^2}{|f(w)|^2} (1 - |w|^2) d\nu(w) \end{aligned} \quad (4)$$

が成立する. 但し, $\chi(t) = \{\log(1 + e^t)\}^p$ ($t \in \mathbb{R}$) である.

$f \in N^p(B)$ であるから Lemma 3 より

$$\int_B \chi''(\log |f(w)|) \frac{|(\nabla f)(w)|^2}{|f(w)|^2} (1 - |w|^2) d\nu(z) < \infty \quad (5)$$

である. (4), (5) 及び Lemma 3 により $f \circ \psi \in N^p(B)$ であることが従う. $\varphi_a \in \text{Aut}(B)$ であるから Lemma 7 より $f \circ \psi \circ \varphi_a \in N^p(B)$ である. すなわち $f \circ \varphi \in N^p(B)$ である. φ による合成写像 C_φ は $N^p(B)$ から $N^p(B)$ への線型写像となり, 閉グラフ定理を用いることにより, $C_\varphi : N^p(B) \rightarrow N^p(B)$ は有界であることが示される.

$0 \notin \varphi(B)$ の場合は, $\psi = \varphi_b \circ \varphi$ ($b = \varphi(0)$) と置けば $0 \in \psi(B)$ である. 上記により $f \in N^p(B)$ に対し, $f \circ \psi \in N^p(B)$ が従う. ψ の決め方より $\varphi = \varphi_b \circ \psi$ であり, $\varphi_b \in \text{Aut}(B)$ であるから Lemma 7 より $f \circ \varphi_b \in N^p(B)$ である. 従って, $f \circ \varphi = (f \circ \varphi_b) \circ \psi \in N^p(B)$ である. このことから $0 \in \varphi(B)$ の場合と同様にして $C_\varphi : N^p(B) \rightarrow N^p(B)$ は有界であることが示される.

$-1 < \alpha < \infty$ の時は, Lemma 4 及び, Lemma 5 を用いて $\alpha = -1$ の時とほぼ同様に示される. \square

次は単位円板上の定理 ([1]Theorem 4.1) を単位球 B 上で考察したものである:

Theorem 4. $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ とする. φ を B から B への正則写像とする.

(a) φ が

$$\sup_{\substack{0 < r < 1 \\ \eta \in S}} \int_S \left(\frac{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}{|1 - \langle \varphi(r\zeta), \eta \rangle|^2} \right)^{np} d\sigma(\zeta) < \infty$$

を満たす時, 次が成立する:

(i) $\|f \circ \varphi\|_{N^p(B)} \leq K \|f\|_{N(B)}$ ($f \in H(B)$).

但し,

$$K \equiv \sup_{\substack{0 < r < 1 \\ \eta \in S}} \left[\int_S \left(\frac{1 - |\varphi(r\zeta)|^2}{|1 - \langle \varphi(r\zeta), \eta \rangle|^2} \right)^{np} d\sigma(\zeta) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) $C_\varphi(N(B)) \subset N^p(B)$.

(iii) $C_\varphi : N(B) \rightarrow N^p(B)$ は連続である.

(iv) $C_\varphi : N^q(B) \rightarrow N^p(B)$ は有界である.

(b) φ が

$$\sup_{w \in B} \int_B \left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \langle \varphi(z), w \rangle|^2} \right)^{p(n+1+\alpha)} d\nu_\alpha(z) < \infty$$

を満たす時, 次が成立する:

(i) $\|f \circ \varphi\|_{(AN)^p(\nu_\alpha)} \leq K \|f\|_{(AN)^1(\nu_\alpha)}$ ($f \in H(B)$).

但し,

$$K \equiv \sup_{w \in B} \left[\int_B \left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \langle \varphi(z), w \rangle|^2} \right)^{p(n+1+\alpha)} d\nu_\alpha(z) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) $C_\varphi : (AN)^q(\nu_\alpha) \rightarrow (AN)^p(\nu_\alpha)$ は有界である.

Proof. (a) を証明する. $f \in N(B)$ に対し, Lemma 8 により S 上の正値 Borel 測度 μ が存在し, 次が成立する:

$$\log(1 + |f(z)|) \leq P[\mu](z) \quad (z \in B), \quad (1)$$

$$\|\mu\| = \sup_{0 < r < 1} \int_S \log(1 + |f_r|) d\sigma. \quad (2)$$

各 $r \in (0, 1)$ に対し, (1) により

$$\int_S \{\log(1 + |(f \circ \varphi)(r\zeta)|)\}^p d\sigma(\zeta) \leq \int_S \{P[\mu](\varphi(r\zeta))\}^p d\sigma(\zeta). \quad (3)$$

ここで, Hölder の不等式により

$$\begin{aligned} \{P[\mu](\varphi(r\zeta))\}^p &= \left[\int_S P(\varphi(r\zeta), \eta) d\mu(\eta) \right]^p \\ &\leq \int_S \{P(\varphi(r\zeta), \eta)\}^p d\mu(\eta) \cdot \|\mu\|^{p-1} \end{aligned} \quad (4)$$

が成立する. (2), (3), (4) により

$$\begin{aligned} &\int_S \{\log(1 + |(f \circ \varphi)_r(\zeta)|)\}^p d\sigma(\zeta) \\ &\leq \left[\sup_{0 < r < 1} \int_S \log(1 + |f_r|) d\sigma \right]^{p-1} \cdot \int_S \{P(\varphi(r\zeta), \eta)\}^p d\mu(\eta) \\ &\leq K^p \|f\|_{N(B)}^{p-1} \cdot \|\mu\| \\ &= K^p \|f\|_{N(B)}^p. \end{aligned}$$

従って, (i) が成り立つ. (ii), (iii) は (i) から従う. また, $1 \leq q < \infty$ であるから Hölder の不等式により $\|f\|_{N(B)} \leq \|f\|_{N^q(B)}$ が成立するから (i) により,

$$\|f \circ \varphi\|_{N^p(B)} \leq K \|f\|_{N^q(B)} \quad (f \in N^q(B))$$

である. この不等式により $C_\varphi : N^q(B) \longrightarrow N^p(B)$ は連続であるから (iv) が従う.

次に (b) を示す. $f \in H(B)$ に対し, $\log(1 + |f|)$ は B 上の \mathcal{M} -劣調和関数であるから, $z \in B$ に対し,

$$\log(1 + |f(z)|) \leq \int_B \log(1 + |(f \circ \varphi_z)(w)|) d\nu_\alpha(w) \quad (5)$$

が成立する. Lemma 1 により

$$(J_{\mathbb{R}} \varphi_z)(w) \cdot (1 - |\varphi_z(w)|^2)^\alpha = \left(\frac{1 - |z|^2}{|1 - \langle z, w \rangle|^2} \right)^{n+1+\alpha} (1 - |w|^2)^\alpha$$

であるから,

$$\begin{aligned}
& \int_B \log(1 + |(f \circ \varphi_z)(w)|) d\nu_\alpha(w) \\
&= c_\alpha \int_B \log(1 + |f(\varphi_z(w))|) (1 - |w|^2)^\alpha d\nu(w) \\
&= c_\alpha \int_B \log(1 + |f(w)|) (J_{\mathbf{R}} \varphi_z)(w) \cdot (1 - |\varphi_z(w)|^2)^\alpha d\nu(w) \\
&= c_\alpha \int_B \log(1 + |f(w)|) \left(\frac{1 - |z|^2}{|1 - \langle z, w \rangle|^2} \right)^{n+1+\alpha} (1 - |w|^2)^\alpha d\nu(w) \\
&= \int_B \log(1 + |f(w)|) \left(\frac{1 - |z|^2}{|1 - \langle z, w \rangle|^2} \right)^{n+1+\alpha} d\nu_\alpha(w) \tag{6}
\end{aligned}$$

が成立する. (5), (6) より

$$\log(1 + |f(z)|) \leq \int_B \log(1 + |f(w)|) \left(\frac{1 - |z|^2}{|1 - \langle z, w \rangle|^2} \right)^{n+1+\alpha} d\nu_\alpha(w) \quad (z \in B) \tag{7}$$

が成り立つ. $\varphi(z) \in B$ であるから (7) より

$$\begin{aligned}
& \int_B \{\log(1 + |(f \circ \varphi)(z)|)\}^p d\nu_\alpha(z) \\
& \leq \int_B \left[\int_B \log(1 + |f(w)|) \left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \langle \varphi(z), w \rangle|^2} \right)^{n+1+\alpha} d\nu_\alpha(w) \right]^p d\nu_\alpha(z)
\end{aligned}$$

である. Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
& \left[\int_B \log(1 + |f(w)|) \left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \langle \varphi(z), w \rangle|^2} \right)^{n+1+\alpha} d\nu_\alpha(w) \right]^p \\
& \leq \int_B \log(1 + |f(w)|) \left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \langle \varphi(z), w \rangle|^2} \right)^{p(n+1+\alpha)} d\nu_\alpha(w) \\
& \quad \times \left[\int_B \log(1 + |f(w)|) d\nu_\alpha(w) \right]^{p-1}
\end{aligned}$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned}
& \int_B \{\log(1 + |(f \circ \varphi)(z)|)\}^p d\nu_\alpha(z) \\
& \leq \left[\int_B \log(1 + |f(w)|) d\nu_\alpha(w) \right]^{p-1} \\
& \quad \times \int_B d\nu_\alpha(z) \int_B \log(1 + |f(w)|) \left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \langle \varphi(z), w \rangle|^2} \right)^{p(n+1+\alpha)} d\nu_\alpha(w) \\
& = \left[\int_B \log(1 + |f(w)|) d\nu_\alpha(w) \right]^{p-1} \\
& \quad \times \int_B \log(1 + |f(w)|) d\nu_\alpha(w) \int_B \left(\frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \langle \varphi(z), w \rangle|^2} \right)^{p(n+1+\alpha)} d\nu_\alpha(z) \\
& \leq K^p \|f\|_{(AN)^1(\nu_\alpha)}^p
\end{aligned}$$

が成り立つ. これより (i) が従う. (ii) は (a) の (iv) と同様に示される. \square

References

- [1] J. S. Choa and H. O. Kim. Composition operators between Nevanlinna-type spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 257, pp. 378–402, 2001.
- [2] Carl C. Cowen and Barbara D. MacCluer. *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*. CRC Press, 1994.
- [3] B. D. MacCluer and J. H. Shapiro. Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces. *Can. J. Math.*, Vol. 38, pp. 878–906, 1986.
- [4] Y. Matsugu and J. Miyazawa. A characterization of weighted Bergman-Orlicz spaces on the unit ball of \mathbb{C}^n . preprint.
- [5] Y. Matsugu and J. Miyazawa. A characterization of weighted Bergman-Privalov spaces on the unit ball of \mathbb{C}^n . preprint.
- [6] N. Mochizuki. Algebras of holomorphic functions between H^p and N_* . *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 105, pp. 898–902, 1989.
- [7] C. Ouyang and J. Riihenta. Characterizations of Hardy-Orlicz spaces on \mathbb{C}^n . *Math. Scand.*, Vol. 80, pp. 25–40, 1997.
- [8] I. I. Privalov. *Boundary Properties of Singled-Valued Analytic Functiones*. Izd. Moskov. Univ., Moscow, 1941. in Russian.

- [9] J. W. Roberts and M. Stoll. Prime and principal ideals in the algebra N^+ . *Arch. Math.*, Vol. 27, pp. 387–393, 1976.
- [10] W. Rudin. *Function Theory in the Unit Ball of \mathbb{C}^n* . Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.
- [11] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, second edition, 1991.
- [12] J. H. Shapiro. Zeros of functions in weighted Bergman spaces. *Michigan Math. J.*, Vol. 24, pp. 243–256, 1977.
- [13] M. Stoll. Mean growth and Taylor coefficients of some topological algebras of analytic functions. *Ann. Polon. Math.*, Vol. 35, pp. 139–158, 1977.
- [14] M. Stoll. *Invariant Potential Theory in the Unit of Ball of \mathbb{C}^n* . Cambridge Univ. Press, 1994.
- [15] A. V. Subbotin. Functional properties of Privalov spaces of holomorphic functions in several variables. *Math. Notes.*, Vol. 65, pp. 230–237, 1999.
- [16] N. Yanagihara and Y. Nakamura. Composition operators on the class N^+ . *TRU Math.*, Vol. 14, pp. 9–16, 1978.